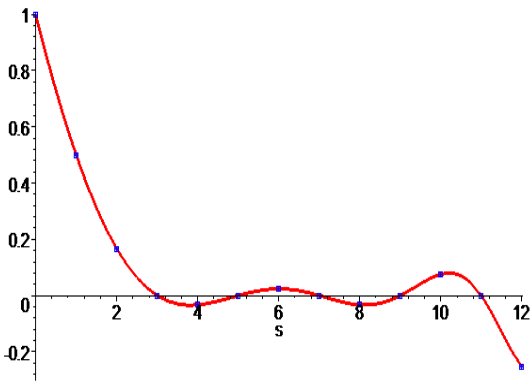
ON THE DEFINITION OF THE BERNOULLI NUMBERS.

DIE BERNOULLI-ZAHLEN SIND DIE KINDER DER ZETAFUNKTION...

PETER H. N. LUSCHNY

$\mathcal{B}_0$	1
$\mathcal{B}_1$	$1-1/2$
$\mathcal{B}_2$	$1-1/2-1/3$
$\mathcal{B}_4$	$1-1/2-1/3-1/5$
$\mathcal{B}_6$	$1-1/2-1/3-1/7$
$\mathcal{B}_8$	$1-1/2-1/3-1/5$
$\mathcal{B}_{10}$	$1-1/2-1/3-1/11$

$$\zeta(s) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\mathcal{B}_k}{k!} s^{\overline{k-1}} + R(s,m)$$



$$\beta(s) = -s\zeta(1-s)$$
$$\mathcal{B}_n = \beta(n)$$

INHALTSVERZEICHNIS

Vorbemerkung:

Ausgangspunkt dieser Arbeit war eine Diskussion in der Newsgroup de.sci.mathematik. Deren zentrale Frage legte ich in einem offenen Brief Donald E. Knuth vor. Professor Knuth war so liebenswürdig darauf zu antworten. Dies ist meine Erwiderung an Prof. Knuth. Den offenen Brief und Knuths Anwort kann man im Internet nachlesen:
http://www.luschny.de/math/zeta/TheBernoulliConfusion.html

1 THE BERNOULLI CONFUSION

Dear Professor Knuth,

vielen Dank, dass Sie sich die Zeit genommen haben, auf meinen Brief zu antworten.

> *You seem to prefer the generating function* $ze^z/(e^z-1)$ *instead of* $z/(e^z-1)$;

Ja und Nein. Mein primäres Anliegen ist es, eine *inhaltliche* Definition der Bernoulli-Zahlen zu finden. Eine Definition, die, wenn es sein soll, auch über das von Bernoulli selber gegeben paradigmatische Anwendungsbeispiel hinausgeht. *Dann* erst möchte ich mich der Frage von Darstellungen zuwenden. Und eine erzeugende Funktion ist nur eine formale Darstellung, die in erster Linie der leichten rechnerischen Manipulation dieser Zahlen dient, aber stets ihrem Inhalt untergeordnet zu bleiben hat und sich nie in den Rang einer Definition (außer in Lehrbüchern für Ingenieure) aufschwingen darf.

So gesehen wäge ich nicht zwei verschiedene erzeugende Funktionen gegeneinander ab, sondern bestimme diejenige, welche nach meinem Verständnis die Bernoulli-Zahlen darstellt. Das ist in der Tat $ze^z/(e^z-1)$.

Aber um den Lauf der Diskussion einzuhalten, zäunen wir eben das Ross von hinten auf. Worauf wir uns in jedem Fall sofort verständigen können, ist die erzeugende Funktion der Bernoulli-Polynome.

$$\frac{ze^{zx}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{z^n}{n!}\ . \tag{1.1}$$

Dies als Ausgangspunkt gewählt, kommen jetzt nur zwei Dinge in Frage, Bernoulli-Zahlen genannt zu werden: die Koeffizienten für die mit $x=0$ und $x=1$ aus (1.1) entstehenden erzeugenden Funktionen.

$$B^{(0)}(z) = \frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(0)\frac{z^n}{n!} \tag{1.2}$$

$$B^{(1)}(z) = \frac{ze^z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(1)\frac{z^n}{n!} \tag{1.3}$$

Die Frage ist also, welche der beiden Folgen

$$B_n(0) = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, \ldots \tag{1.4}$$

$$B_n(1) = 1, +\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, \ldots \tag{1.5}$$

eher geeignet sind, die *unity of mathematics* zu repräsentieren. Tatsächlich unterscheiden sich diese beiden Folgen nur für $n = 1$, und auch da nur im Vorzeichen, $B_1(1) = -B_1(0)$.

Eine unglückliche Fügung. Denn sie verführt dazu zu bagatellisieren, was keine Bagatelle ist. Zu sagen, dass die Summe der Koeffizienten eines Polynoms einen gewissen Wert hat ist eine wesentlich inhaltsreichere Aussage als einem konstanten Term einen Namen zu geben.

Ich werde im ersten Teil der Arbeit für die Bernoulli-Zahlen $\mathcal{B}_n$ schreiben, sie aber *undefiniert* lassen! $\mathcal{B}_n$ ist also als eine *Metavariable* für $B_n(0)$, $B_n(1)$ und später $\beta(n)$ zu verstehen. Erst im zweiten Teil der Arbeit wird $\mathcal{B}_n$ eine feste Bedeutung bekommen.

1.1 BERNOULLI-ZAHLEN UND STIRLING-POLYNOME.

> *… but I can think of many reasons to prefer the latter formula … not least the connection with Stirling numbers in Concrete Math (7.52), although I realize that the former function does arise in my definition of Stirling polynomials in Concrete Math (6.50).*

Betrachten wir dazu

$$\left(B^{(1)}(z)\right)^x = x \sum_{n \geqslant 0} \sigma_n(x) z^n \ . \tag{1.6}$$

Sie definieren die Stirling-Polynome σ_n basierend auf $B^{(1)}(z)$, und dies leuchtet mir ein. Denn damit ist der Zusammenhang zwischen Stirling-Polynomen und Bernoulli-Zahlen dann sehr einfach zu beschreiben

$$n!\sigma_n(1) = B_n(1) \quad (n \geqslant 0) \ . \tag{1.7}$$

Verstehen wir die Suche nach den wahren Bernoulli-Zahlen als ein Match, dann sagt diese Identität aus: **1 : 0** für die Wahl $\mathcal{B}_n = B_n(1)$.

Denn in diesem Fall ist $\left(B^{(1)}(z)\right)^m$ für $m = 1$ die *direkte* Beziehung zwischen den Stirling-Polynomen und den Bernoulli-Zahlen. Was kann man an Einfachheit und Kohärenz mehr erreichen?

Betrachten wir aber noch das Gegenstück, das Verhältnis von $\sigma_n(0)$ zu $B_n(0)$. Es gestaltet sich wesentlich problematischer. In *Concrete Math* Exercise 6.18 finden wir

$$(x+1)\sigma_n(x+1) = (x-n)\sigma_n(x) + x\sigma_{n-1}(x)\ . \tag{1.8}$$

Setzt man $x = 0$, so erhält man $\sigma_n(1) = -n\sigma_n(0)$. Wählt man nun $n = 0$, dann gibt es eine *arithmetical exception*, denn $\sigma_0(x) = 1/x$. $\sigma_0(0)$ kann also schon mal nicht $B_0(0)$ sein. Wählt man nun $n = 1$, dann folgt aus $\sigma_n(1) = -n\sigma_n(0)$, da $\sigma_1(x) = 1/2$, unglücklicherweise $1/2 = -1/2$.

Ist da irgendwo ein $(-1)^n$ vergessen worden? Oder gelten gewisse Relationen nur für $n > 1$? Hatte da gar der *Bernoulli-Bug* seine Hände im Spiel? Zusammengefasst:

Wählt man die Definition $\mathcal{B}_n = B_n(1)$, so kann man statt

$$\begin{aligned} &\frac{z}{e^z-1} && \text{in } \textit{Concrete Math } (7.44) && B^{(1)}(z) \text{ schreiben,} \\ &\frac{z}{1-e^{-z}} && \text{in } \textit{Concrete Math } (7.52) && B^{(1)}(z) \text{ schreiben,} \\ &\frac{ze^z}{e^z-1} && \text{in } \textit{Concrete Math } (6.50) && B^{(1)}(z) \text{ schreiben,} \end{aligned} \tag{1.9}$$

und so den Zusammenhang zwischen den Bernoulli-Zahlen und den Stirling-Polynomen klarer und einfacher zum Ausdruck bringen.

1.2 DIE BERNOULLI-FUNKTION.

Betrachten wir nun die Bernoulli-Funktion $\beta(s)$.

$$\beta(s) = -2(2\pi)^{-s}\cos(s\pi/2)s!\zeta(s) \tag{1.10}$$

> *…notice that there are many functions that interpolate the Bernoulli numbers at all positive integers; for example, multiply your „Bernoulli function“ by* $e^{2\pi i s}$ *or by* $\cos \pi s$.

Ja natürlich, es gibt auch unendlich viele Funktionen, welche die Zahlen $1, 1\cdot 2, 1\cdot 2\cdot 3, 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4, \ldots$ interpolieren, und doch wird keiner auf die Idee kommen, an die von Daniel Bernoulli und Leonhard Euler gefundene Γ Funktion einen cos-Faktor zu heften. Und genauso wenig hier. Hier haben uns Euler und Riemann die Funktion erklärt, wir müssen sie nur richtig anwenden.

Natürlich ist es wahr, dass, wenn wir $\beta(s)\cos(\pi s)$ betrachten würden, wir ein paar nichtssagende Oszillationen mehr bekämen und die $-1/2$

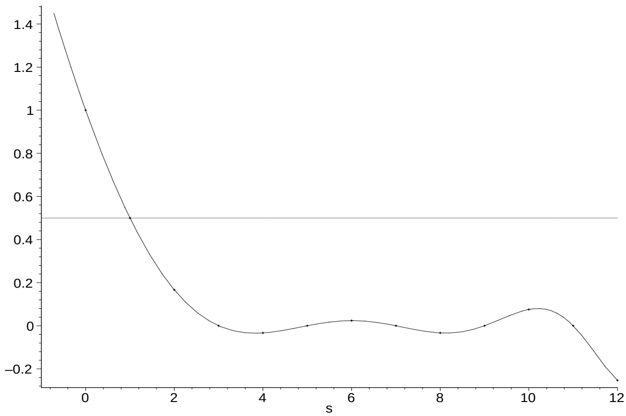


Abbildung 1 – Die Bernoulli-Funktion $\beta(s) = -s\zeta(1-s)$

wäre im Punkt 1 dann getroffen. Aber um Himmels Willen, unsere Definition ist nicht willkürlich gewählt! Der Wert der Definition liegt in dem Zusammenhang mit der riemannschen Funktionalgleichung. In der Tat ist sie fast identisch mit deren rechter Seite!

$$\zeta(1-s) = -2(2\pi)^{-s}\cos(s\pi/2)\Gamma(s)\zeta(s) \tag{1.11}$$

Mit ihr erhalten wir die Darstellung

$$\beta(s) = -s\zeta(1-s)\ . \tag{1.12}$$

Wir führen hier also nur eine Bezeichnung ein, die uns hilft, die Früchte der riemannschen Funktionalgleichung im Kontext der Bernoulli-Zahlen zu ernten. *Dabei soll aber die Funktionalgleichung natürlich unversehrt bleiben.* Dieses Vorgehen lässt sich auch zu der Darstellung der Bernoulli-Polynome durch die Hurwitz-Zetafunktion fortführen.

$$\zeta(-n, w) = -\frac{B_{n+1}(w)}{n+1} \qquad (n \geqslant 0) \tag{1.13}$$

Zu finden beispielsweise bei T. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Th. 12.13. Aus dieser folgt mit $w = 1$ (Apostol, Th. 12.16)

$$B_n(1) = -n\zeta(1-n)\ . \tag{1.14}$$

Damit ist die *Bernoulli-Funktion* aber genau die konfluente Fortsetzung dieser Identität. Die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ bedürfen noch der besonderen

Prüfung. In diesen Fällen ist $\beta(n) = \lim_{t\to n} \beta(t)$ zu verstehen. Aber beide Grenzwerte existieren, $\lim_{t\to 0} \beta(t) = 1$ und $\lim_{t\to 1} \beta(t) = 1/2$. Hat man also die Bernoulli-Funktion $\beta(s)$ eingeführt, macht $\mathcal{B}_n = \beta(n)$ als Definition einen Sinn. Und da

$$\beta(n) = B_n(1) \tag{1.15}$$

steht unser Match **2 : 0** für die Wahl $\mathcal{B}_n = B_n(1)$. Nur diese Wahl spiegelt direkt den tiefen Zusammenhang mit der Zetafunktion wider.

1.3 THE CONTINUATION OF AN ALMOST MIRACULOUS FORMULA.

Betrachten wir dazu auch folgende wunderschöne Formel

$$\frac{(2\pi)^s \beta(s)}{s!} = -2\cos(s\pi/2)\zeta(s) \ , \tag{1.16}$$

die für *alle komplexen Zahlen* gilt sofern man sie in den Punkten $\{0, 1\}$ durch die jeweiligen Grenzwerte 1 und π stetig fortsetzt. Insbesondere gilt also

$$\frac{(2\pi)^n \mathcal{B}_n}{n!} = -2\cos(n\pi/2)\zeta(n) \quad (n > 1 \text{ ganz}) \ .$$

Setzt man hier $\mathcal{B}_1 = 1/2$ ein, so erhält man $\pi = \pi$, setzt man aber $\mathcal{B}_1 = -1/2$ ein, so erhält man $-\pi = \pi$. Vergleicht man (1.16) mit *CMath* (6.89), einer Formel von Euler, die Sie als eine *almost miraculous closed form for infinitely many infinite sums* bezeichen,

$$\frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}(0)}{(2n)!} = -2(-1)^n \zeta(2n) \qquad (n > 0) \ , \tag{1.17}$$

so erkennt man, dass (1.17) ja nichts anderes ist als die Vorläuferin von (1.16), die wiederum nichts anderes ist als die riemannsche Funktionalgleichung (1.11)! – Ist es abwegig zu spekulieren, dass Riemann beim Betrachten von Eulers (1.17) auf (1.16) kam? Und (1.17) ist *almost miraculous* während man (1.16) vielleicht einen cos Faktor anhängen kann? Man betrachte dazu auch Abbildung 2.

Und dieser Glanzpunkt der Mathematik, und ihrer Geschichte, soll mit einem $-\pi = \pi$ kompromittiert werden, indem man $\mathcal{B}_1 = B_1(0)$ setzt? Matchstand **3 : 0** für die Wahl $\mathcal{B}_n = B_n(1)$, weil sie nicht zu solch absurden Konsequenzen führt.

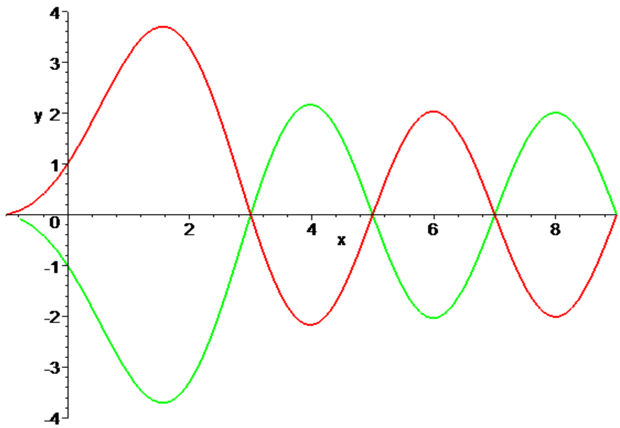


Abbildung 2 – An almost miraculous function, $-(2\pi)^s \zeta(1-s)/(s-1)!$

1.4 DIE EULER-MACLAURIN-ENTWICKLUNG DER ZETAFUNKTION.

Die Art und Weise, wie Sie das Verhältnis *finite and infinite calculus* (CMath 2.6) beschreiben, bietet sich auch an, das Verhältnis von Zetafunktion zu den Bernoulli-Zahlen zu beleuchten. Sei also

$$\zeta(s) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$$

Wenn wir jetzt mit der Euler-Maclaurin-Formel analytisch entwickeln, finden wir, mit $\mathcal{B}_n = B_n(1)$,

$$\zeta(s) = \sum_{k=0}^{K} \frac{\mathcal{B}_k}{k!} s^{\overline{k-1}} + R(s,K)\ , \tag{1.18}$$

wobei $R(s,K)$ ein hier nicht weiter interessierender Rest ist.

Der Witz ist hier die geschlossene Gestalt der Summe. Explizit:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{\mathcal{B}_0}{0!} s^{\overline{-1}} + \frac{\mathcal{B}_1}{1!} s^{\overline{0}} + \frac{\mathcal{B}_2}{2!} s^{\overline{1}} + \cdots + R(s,K)\\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} s + \cdots + R(s,K)\ .\end{aligned}$$

Die Euler-Maclaurin-Formel, die Rechenregeln der steigenden Potenzen, die Bernoulli-Zahlen, alles harmoniert wunderbar, sofern man $\mathcal{B}_1$ richtig wählt, nämlich $1/2$ und nicht $-1/2$. Matchstand **4 : 0**.

Und wie sieht die Praxis aus? Ich greife ein Beispiel aus einer Experten-Arbeit aus dem Jahr 2006 heraus, das sich im arXiv:math findet. Da es mir fern liegt den Autor zu kritisieren, schilder ich nur den Sachverhalt, der typisch für eine ganze Klasse von Euler-Maclaurin-Formeln ist, die unter der Setzung $\mathcal{B}_1 = -1/2$ an formalen Gehalt verlieren. Der Autor gibt obige Euler-Maclaurin-Entwicklung der Zetafunktion an, und zwar so:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{K} \frac{B_{2k}}{(2k)!} s(s+1)\cdots(s+2k-2) + R(s,K) \quad (1.19)$$

Aus der klaren, strukturreichen und einprägsamen Formel (1.18) ist ein Formelsalat geworden. Nun war der Autor ja quasi gezwungen die elaborierte Form zu wählen, denn sie ermöglichte es ihm $\mathcal{B}_1 = 1/2$ zu schreiben, ohne mit der Konvention $\mathcal{B}_1 = -1/2$ in Konflikt zu kommen. *Wir sehen, wie die falsche Wahl von $\mathcal{B}_1$ zu einem beträchtlichen Verlust an formaler Prägnanz führen kann.* Verglichen mit (1.18) finde ich (1.19) sogar ein wenig irreführend: denn hier werden durch die Schreibweise Ausnahmen in der (Startphase der) Entwicklung der Zetafunktion suggeriert, wo in Wirklichkeit ein einfaches Gesetz regiert.

1.5 DIE RICHTIGE INDIZIERUNG DER SUMME.

> *Dijkstra correctly said that most loops should run from 0 to n - 1, not from 1 to n. That's why the sum of*
>
> $$0^m + 1^m + \cdots + (n-1)^m$$
>
> *is cleaner (and more satisfying to a mature mathematician) than* $1^m + \cdots + n^m$.

D'accord! Aber eine solche Darstellung ist mit $\mathcal{B}_1 = 1/2$ ebenso möglich wie mit $\mathcal{B}_1 = -1/2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(m) - B_{n+1}(0)\right),$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(m) - (-1)^{n+1} B_{n+1}(1)\right).$$

So gesehen ist dieser Punkt ohne Relevanz für unsere Betrachtung.

1.6 Zwei Identitäten.

Consider, for example, the fact that

$$z/(e^z - 1) - z/(e^z + 1) = 2z/(e^{2z} - 1)\,, \tag{1.20}$$

an identity with many more applications . . .

Ich bin mir nicht sicher, ob ich die Bedeutung dieser Bemerkung richtig verstehe. Falls Sie meinen, dass die Existenz der Identität (1.20) für die Wahl der erzeugenden Funktion $B^{(0)}(z)$ spricht, so weise ich darauf hin, dass auch eine Identität von nicht minderer Schönheit existiert, die dann für die Wahl von $B^{(1)}(z)$ sprechen würde. Denn da

$$B^{(1)}(z) = ze^z/(e^z - 1) = z/(1 - e^{-z})$$

ist, werden wir in Analogie zu (1.20) auf die Identität geführt

$$z/(1 - e^{-z}) - z/(1 + e^{-z}) = 2z/(e^z - e^{-z})\,. \tag{1.21}$$

Die Identität (1.21) geht unter der Substitution $z \to -z$ in sich selber über. Damit kann sie auch gleichwertig geschrieben werden

$$z/(1 + e^z) - z/(1 - e^z) = 2z/(e^z - e^{-z})\,.$$

Mit anderen Worten: Wir brauchen nicht zu befürchten, dass es auf dem *Markt für hyperbolische Funktionen* zu Engpässen bei der Anlieferung von Koeffizienten kommen würde, wenn man $B^{(1)}(z)$ wählt.

1.7 Eingeschränkte Gültigkeitsbereiche.

Ernster scheint mir dagegen die Beobachtung zu sein, dass natürlich erscheinende Identitäten einen kleineren Gültigkeitsbereich besitzen, wenn man $B^{(0)}(z)$ statt $B^{(1)}(z)$ wählt. Bezeichnen wir mit E_n die Euler-Zahlen, so gilt folgende Identität

$$\mathcal{B}_n = \frac{n}{(4^n - 2^n)} \sum_{0 \leqslant k < n} \binom{n-1}{k} E_k\,.$$

Die Wahl von $B^{(1)}(z)$ schließt hier den Index $n = 1$ mit ein, während ihn die Wahl von $B^{(0)}(z)$ ausschließt, ohne dass dafür ein plausibler Grund zu sehen wäre.

Aber damit ist es nicht getan. Ist der Index $n = 1$ ausgeschlossen, dann schließen viele Autoren gleich alle anderen ungeraden n auch mit aus. Das Ergebnis ist dann folgende Katastrophe (dlmf.nist.gov/BP.4.15)

$$\mathcal{B}_{2n} = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} E_{2k} \, .$$

Auf den ersten Seiten von *CMath* erklären Sie *techniques that make summation user-friendly* und erläutern unter anderem, dass das Weglassen von Termen in einer Summe keineswegs immer eine gute Idee ist: *But such temptations should be resisted; efficiency of computation is not the same as efficiency of understanding!*

In der Tat wurde so aus einer einprägsamen Formel, die mit $B^{(1)}(z)$ für all $n > 0$ gilt, eine künstlich aufgeblähte Formel mit reduziertem Gehalt.

1.8 Bernoulli und Mona Lisa.

> *Todays long-standing mathematical conventions have many, many defects, and I can think of dozens of cases where changes would improve the current situation and make it easier on all future mathematicians.*

Dann sollten wir dies auch tun! Aber dieses *constant refactoring*, wie es die Informatiker treffend nennen, sollten wir mit Freude und ohne schlechtes Gewissen tun.

> *But I would never think* B_1 *to be anywhere near as important.*

Nun, es ist schwierig auf dieses Argument zu antworten. Wenn Leonardo sich entschlossen hätte, der Mona Lisa eine schwarze Warze auf die Nase zu malen, dann wäre das auch nicht weiter wichtig. Aber es würde unser ästhetisches Empfinden verletzen.

Und so empfinde ich den *Bernoulli-Bug*: als eine häßliche Warze auf auf der Euler-Riemann-Funktionalgleichung der Zetafunktion. Ich kann nicht am Sonntag Reden über die Schönheit der Mathematik und die Feinfühligkeit der Mathematiker halten und wochentags diese Monstrosität tolerieren. Und immerhin schreibt Barry Mazur:

> ... Bernoulli numbers sit in the center of a number of mathematical fields, and whenever, for a given index k the Bernoulli

> number B_k exhibits some particular behavior, these different mathematical fields seem to feel the consequences, each in their own way. (B. Mazur: *Bernoulli numbers and the unity of mathematics*.)

Also vielleicht ist es doch wichtig. Und außerdem: *... a horse is a horse and a bug is a bug*. Und warum sollten wir einen Fehler nicht korrigieren, nachdem wir ihn erkannt haben? Sind Sie nicht selber bereit 2,56 $ selbst für typographische Fehler in *CMath* zu zahlen? Und wir haben auch mit dem *broken windows syndrom* zu kämpfen: haben sich Fehler ersteinmal eingeschlichen, so werden sie sich auf dieser Grundlage auch vermehren! Meine Auffassung ist, dass es in der Mathematik keine *isolierten* Fehler gibt. Jeder Bug schränkt unsere Fähigkeit ein, die Zusammenhänge zu verstehen. Er bedeutet auch, dass viel Arbeit von den Mathematikern investiert werden muss, die Mängel zu umschiffen – Anstrengung und Zeit, die zu kreativerem Nachdenken genutzt werden könnte.

Aber all dies ist nicht das entscheidende Argument. Das entscheidende Argument ist, dass offenbar eine *theoretische Lücke* vorhanden sein muß, wenn eine solche Frage nicht eindeutig beantwortbar wäre. Diese zu schließen muss das Anliegen eines jeden Mathematikers sein.

1.9 KONFUSION? ODER KLÄRUNG?

Als erstes denke ich, sollten wir festhalten, dass die beiden Erfinder der Bernoulli-Zahlen, Sansei Takekazu-Kowa Seki und Jacob Bernoulli, $\mathcal{B}_1$ als $1/2$ verwendet haben. Matchstand **5 : 0** für die Wahl $\mathcal{B}_n = B_n(1)$, denn wir sollten diesen beiden Herren ein Mitspracherecht einräumen, finde ich. *Apropos*, was würden Sie dazu sagen, wenn ich die Folge $1, -3, 3, 4, 7, 7, \ldots$ Knuth-Zahlen nennen würde ;-) ? Und frühere Mathematiker wie Francois de Viete oder Leonhard Euler haben sich selbstverständlich in ihrem Werk auf Bernoullis Bernoulli-Zahlen bezogen. Das heißt, *hier wurde bereits* eine Veränderung vorgenommen, die dann insbesondere durch das HMF popularisiert wurde. Den Grund für diese Veränderung hat mir noch niemand nennen können.

> *... the amount of confusion that a change would produce is vast.*

Ein Blick in die Geschichte der Bernoulli-Zahlen lässt mich die Dinge nicht so sehen. Schließlich hat es lange Zeit gebraucht, bis der Begriff der Bernoulli-Polynome ihre heutige Form gefunden hat, und viele der frühen wichtigen Autoren zu diesem Thema hatten während der Phase der Einführung der Bernoulli-Polynome von einander abweichende Definitionen und Notationen. *Mais c'est normal!*

> *I find your comment that „the 'confusion' would be small" the understatement of the century.*

Es ist noch ein bisschen zu früh in diesem Jahrhundert, um entscheiden zu können, wie groß dieses Kompliment wirklich ist. ;-))

Ich glaube, wir können die Posaunen von Jericho ruhig in der Schublade lassen, und sagen: *It is more standard to use the value* $B_1 = -1/2$*, but our choice of* $+1/2$ *is harmless* ... (John H. Conway und Tim Hsu, *Some very interesting sequences*).

> *For this and many other reasons over nearly 40 years of working rather heavily with Bernoulli numbers, I have been convinced by the wisdom of the convention that has long been followed by the vast majority of the major writers on mathematics.*

Ich respektiere die früheren Generationen in dem ich ihre Argumente prüfe. Aber es ist überhaupt keine *Konvention* notwendig! Diese Frage läßt sich allein mit mathematischem Verständnis entscheiden!

Und bezüglich der Verwirrung sehe ich die Dinge umgekehrt: Die *confusion* ist schon da. So lese ich etwa in einer Arbeit von H. Gopalkrishna Gadiyar und R. Padma *A Comment on Matiyasevich's Identity* #0102 *with Bernoulli Numbers*, aus dem Jahr 2006:

> There is a lot of confusion in the literature regarding Riemann zeta functions, Bernoulli numbers and their representations.

Der sogenannten ‚Konvention' $\mathcal{B}_1 = -1/2$ wird ja keineswegs einheitlich gefolgt. Und es reicht von dem populären Buch von *Conway* und *Guy*, *The book of numbers* (Matchstand **6 : 0**) bis zu dem viel benutzten und geschätzten Lehrbuch von *Jürgen Neukirch, Algebraische Zahlentheorie* (Matchstand **7 : 0**). Er definiert die Bernoulli-Zahlen über die Reihenentwicklung von $F(t) = B^{(1)}(t)$ (1.3) und schreibt (S. 447f):

> *[Die Bernoulli-Zahlen] erhalten durch ihre Beziehung zur Zetafunktion eine besonders wichtige arithmetische Bedeutung. Die ersten Bernoullischen Zahlen lauten*
>
> $$B_0 = 1, B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}.$$

Allgemein gilt $B_{2\nu+1} = 0$ *für* $\nu \geqslant 1$ *wegen* $F(-t) = F(t) - t$. *In der klassischen Literatur wird meist die Funktion* $t/(et-1)$ *zur Definition der Bernoulli-Zahlen hergenommen. Wegen* $F(t) = t/(et-1) + t$ *erfahren sie dabei keine Veränderung bis auf* B_1*, wo* $-1/2$ *anstelle von* $1/2$ *tritt. Die obige Definition ist aber die natürlichere und weitertragende.*

Und *Jean-Pierre Serre*, der erste Abel-Preis Gewinner, wie soll man damit umgehen, dass er sich nicht an die HMF-Konvention hält, in seinem Buch *A Course in Arithmetic*, das als *breathtaking* rezensiert wurde und auf den Empfehlungslisten vieler Universitäten steht? Selbst einen einfachen Studenten der Mathematik wie mich hat dies nur in Maßen verwirrt. Serre umgeht übrigens unser Problem indem er $\mathcal{B}_n = |B_{2n}(0)| = |B_{2n}(1)|$ $(n \geqslant 1)$ setzt, $\mathcal{B}_1 = 1/6, \mathcal{B}_2 = 1/30, \ldots$.

Nein! Mit den Risiken von Konventionen (*par abuse de language*) und Notationen leben zu lernen gehört zu der Berufsausbildung eines jeden Mathematikers. Und wer als Bergsteiger in eine steile Wand einsteigt, muss sich in jedem Moment der damit verbundenen Gefahren bewusst sein.

So gesehen ist die Frage nicht: *Wie vermeide ich hier die Konfusion*? sondern eher *Wie gehe ich mit der Konfusion richtig um?*. Und natürlich wird ein Mathematiker, der sich diese Frage stellt, zuerst versuchen, ein *mathematisches Argument* zu finden, das die Frage $\mathcal{B}_n = B_n(0)$ oder $\mathcal{B}_n = B_n(1)$ *klärt*, und nur wenn er keines finden sollte, es zu einer Sache der Konvention erklären und bereit sein, einem *gruppenpsychologischen Argument* die Entscheidung zu überlassen.

Halten wir fest: Die Konfusion hat bereits den Hindukusch erreicht. Das HMF wird offenbar nicht überall als eine Bibel angesehen. Und das ist auch gut so. Die Zeit ist reif für eine Klärung!

1.10 VON STAUDT! CLAUSEN! ZUR HÜLF!

Angenommen, jemand legt Ihnen folgende kleine Sequenz vor,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 1 \\
\alpha_1 &= \\
\alpha_2 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
\alpha_4 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\
\alpha_6 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

und bittet Sie, einen Vorschlag zu machen, spontan und intuitiv, für den Wert von α_1. Was würden Sie sagen? $-1/2$? Wie bitte? Glaub' ich nicht! Und ich glaube auch nicht, dass dies der Schöpfer aller Zahlen will.

Mir jedenfalls fällt da nur $1 - \frac{1}{2}$ ein. Und umgekehrt haben schon die beiden Großmeister der Bernoulli-Zahlen, von Staudt und Clausen, in ihren Sätzen (da unabhängig voneinander) aus dem Jahr 1840 die Frage beantwortet, was man unter den α_n verstehen kann...

Ich finde dieses hübsche Argument unwiderstehlich und vergebe dafür einen Punkt. Match- und Endstand **8 : 0** für die Wahl $\mathcal{B}_n = B_n(1)$.

> *The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful; the ideas like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.* (G. H. Hardy)

1.11 EINE REKURSION DER BERNOULLI-ZAHLEN.

Gegeben durch $\mathcal{B}_0 = 1$ und für $n > 0$ durch $\mathcal{B}_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}$ mit

$$a_{n,k} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\mathcal{B}_{n-k} \qquad (0 < k \leqslant n)\ .$$

Das bedeutet, dass $\mathcal{B}_n$ die Summe der Einträge in der n-ten Zeile des nächsten Zahlendreiecks ist $(n \geqslant 0, k \geqslant 0)$:

Man bemerke, dass die ersten 5 Zeilen *identisch* sind mit der von Staudt-Clausen Darstellung! Entstammt diese tiefe Einsicht im Ursprung vielleicht dem Spiel mit dieser Beobachtung? Gut, wir können es nicht wissen, aber wir können sagen, dass eine Definition, die in natürlicher

B_0	1
B_1	$1 - \frac{1}{2}$
B_2	$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
B_3	$1 - \frac{3}{12} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$
B_4	$1 - \frac{4}{12} - \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$
B_5	$1 + \frac{10}{120} - \frac{5}{12} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$
B_6	$1 + \frac{20}{120} - \frac{6}{12} - \frac{1}{2} - \frac{1}{7}$
B_7	$1 - \frac{21}{252} + \frac{35}{120} - \frac{7}{12} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$
B_8	$1 - \frac{56}{252} + \frac{56}{120} - \frac{8}{12} - \frac{1}{2} - \frac{1}{9}$
B_9	$1 + \frac{36}{240} - \frac{126}{252} + \frac{84}{120} - \frac{9}{12} - \frac{1}{2} - \frac{1}{10}$

Tabelle 1 – Eine Rekursion der Bernoulli-Zahlen.

Weise die tiefliegenderen Beziehungen augenscheinlich macht, einer Definition vorzuziehen ist, welche diese aus dem Himmel fallen läßt.

1.12 DAS LCM DER NENNER DER DIAGONALEN.

Wir setzen $\lambda_0 = 1$ und verstehen unter λ_n für $n > 0$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner der Diagonalen, wobei wir von einer teilerfremden Darstellung der $a_{n,k}$ ausgehen.

$$\lambda_n = \mathrm{lcm}\{\mathrm{denom}(a_{n+k,k}) \mid k \geqslant 1\} \quad (n \geqslant 1)\,. \tag{1.22}$$

$$\lambda_n = 1, 2,\ 12,\ 1,\ 120,\ 1,\ 252,\ 1,\ 240,\ 1,\ 132,\ 1,\ 32760,\ 1,\ 12,\ 1,\ 8160,\\ 1, 14364, 1,\ 6600, 1,\ 276, 1,\ 65520,\ 1, 12, 1,\ 3480, 1,\ 85932, 1,\ \ldots$$

Ist $n+1$ eine Primzahl, dann gilt $n+1 \mid \lambda_n$. Davon abgesehen, teilt keine Primzahl $p > \lceil (n+1)/2 \rceil$ die Zahl λ_n. Sofern n eine positive gerade Zahl ist, gilt $12 \mid \lambda_n$. Die 12 taucht in der Folge unendlich oft auf, die ersten Male an den Stellen $2, 14, 26, 34, 38, 62, 74, 86, 94, 98$. Und darin taucht die 12 *wieder* auf, denn offenbar gilt für solche Stellen $n \,\mathrm{smod}\, 12 = \pm 2$. Dabei steht smod (*signed mod*) für die mod-Operation mit kleinstem Rest. 12 ist offenbar die *magische Zahl* der Bernoulli-Zahlen.

Diese Behauptungen lassen sich alle aus bekannten Eigenschaften der Bernoulli-Zahlen herleiten und dem Umstand, dass

$$\lambda_n = \mathrm{denom}(\mathcal{B}_n / n) \quad (n \geqslant 1)\,. \tag{1.23}$$

Unserer fundamentalen Gleichung (1.12) entnehmen wir, dass wir dies auch schreiben können

$$\lambda_n = \operatorname{denom}\left(-\zeta(1-n)\right) \quad (n \geqslant 1)\ .$$

Als erzeugende Funktion können wir $l(x) = (1-e^{-x})^{-1} - x^{-1}$ wählen und erhalten dann

$$\lambda_{n+1} = \operatorname{denom}(n!\ [x^n]\ l(x)) \quad (n \geqslant 0)\ .$$

Damit schließe ich meine Vorbetrachtungen zur Definition der Bernoulli-Zahlen, der ich mich jetzt im zweiten Teil zuwenden.

Abbildung 3 – Karl Georg Christian von Staudt

2 THE BERNOULLI DEFINITION.

Definition. *Die Bernoulli-Zahlen sind die Werte der Funktion* $\beta(s)$ *an den nichtnegativen ganzen Zahlen. Dabei ist*

$$\beta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \Delta^k(s) \ , \tag{2.1}$$

und

$$\Delta^k(s) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} (\nu+1)^s \ . \tag{2.2}$$

Diese Definition hat mindestens drei Vorzüge:

- Sie führt die Bernoulli-Zahlen als Kinder der Zetafunktion ein.
- Sie führt die Bernoulli-Zahlen ebenso als Cousinen der Stirling-Zahlen ein.
- Sie ist konsistent und führt zu keinen offenkundigen oder verdeckten Ausnahmen und es bedarf keiner wie auch immer gearteten Konvention. Sie schließt das theoretische Defizit, das in der Verwendung von erzeugenden Funktionen als Definition liegt.

Und diese Definition hat noch eine Eigenschaft, die jeder guten Begriffsbildung innewohnt: Sie weist über sich hinaus. Weit über die rein rechnerische Handhabung. Kann man mit den Bernoulli-Zahlen die riemannsche Hypothese formulieren? Ich glaube schon. Oder gar mit den Stirling-Zahlen, über diese Brücke? Ich muss noch einmal darüber nachdenken.

Der geheimnisvolle Zusammenhang zwischen den Primzahlen und den Bernoulli-Zahlen regt jedenfalls unsere Phantasie an und den Wunsch, sie weiter zu erforschen. Und hat dies nicht bereits Kummer zur Betrachtung der irregulären Primzahlen und in Reaktion darauf zu den *idealen Zahlen* geführt, aus denen die fruchtbare Theorie der Ideale erwuchs?

Ab jetzt gilt die Definition $\mathcal{B}_n = \beta(n)$ für alle ganzen Zahlen $n \geqslant 0$.

B_0	1
B_1	$1-1/2$
B_2	$1-3/2+2/3$
B_3	$1-7/2+4-3/2$
B_4	$1-15/2+50/3-15+24/5$
B_5	$1-31/2+60-195/2+72-20$
B_6	$1-63/2+602/3-525+672-420+720/7$
B_7	$1-127/2+644-5103/2+5040-5320+2880-630$

Tabelle 2 – Die Hasse-Darstellung der Bernoulli-Zahlen.

In der Definition (2.1) $\beta(s)=\sum_{k\geqslant 0}\Delta^k(s)/(k+1)$ verwende ich die Bezeichnung $\beta(s)$ genauso wie in der Definition der Bernoulli-Funktion $\beta(s)=-s\zeta(1-s)$. Wie passt das zusammen?

Nun, ein *Satz von Hasse* besagt, dass dies ein und das Selbe ist! Hasse gibt einen elementaren, rein reell-analytischen Beweis für diese Identität. Helmut Hasse, *Ein Summierungsverfahren für die Riemannsche ζ-Reihe*, Math. Z. 32 (1930), 458-464. Die Arbeit ist im Internet über das Göttinger Digitalisierungszentrum frei zu beziehen. Halten wir fest:

$$\beta(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta^k(s)}{k+1}=-s\zeta(1-s) \tag{2.3}$$

Durch Interpretation der Variablen s über den natürlichen Zahlen, $n\leftarrow s$ und Anpassung der Summationsgrenze $n\leftarrow\infty$ erhält man direkt eine klassische Darstellung der Bernoulli-Zahlen, die Worpitzky-Darstellung (J. Worpitzky, Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, Crelle 94 (1883), Formel (36)).

$$\mathcal{B}_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Delta^k(n)}{k+1}\,. \tag{2.4}$$

Kann eine Einbettung von diskreten Relationen in die Analysis natürlicher erfolgen? Müssen wir nicht dankbar sein, wenn dann noch eine solche schöne Verbindung zur riemannschen Zetafunktion freigelegt wird? Und müssen wir nicht alles tun, um eine solche Beziehung zu pflegen, sie ausbauen und ihr konventionelle Stolpersteine aus dem Weg räumen?

B_0	$1/1$
B_1	$1/1 - 1/2$
B_2	$1/1 - 3/2 + 2/3$
B_3	$1/1 - 7/2 + 12/3 - 6/4$
B_4	$1/1 - 15/2 + 50/3 - 60/4 + 24/5$
B_5	$1/1 - 31/2 + 180/3 - 390/4 + 360/5 - 120/6$
B_6	$1/1 - 63/2 + 602/3 - 2100/4 + 3360/5 - 2520/6 + 720/7$

Tabelle 3 – Die Worpitzky-Darstellung der Bernoulli-Zahlen

Es ist oftmals von Vorteil, mit vorzeichenlosen Zahlen zu arbeiten. Mit einer geringfügigen Variante der Formel von Worpitzky ist dies möglich. Dazu definieren wir die Worpitzky-Zahlen

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu+k} \binom{k}{\nu} (\nu+1)^n \ , \tag{2.5}$$

und erhalten damit

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle . \tag{2.6}$$

2.3 DER KURZE WEG ZU DEN BERNOULLI-POLYNOMEN.

Ein erfahrener Mathematiker wird eine vorgelegte Familie von Polynomen an der Stelle $x = 1$ untersuchen, sicherlich bevor er sie an der Stelle $x = 0$ betrachtet, denn im Punkt $x = 1$ sammelt ein Polynom mehr Informationen als im Punkt $x = 0$. Und umgekehrt: Wenn er Summen betrachtet, die über ein Feld $0 \ldots n$ laufen, wird er nach einer 1 Ausschau halten, die sich in Abhängigkeit des Summationsindex potenziert. Diese wäre ein natürlicher Kandidat für eine formale Substitution $1 \leftarrow x$ um damit Polynome zu erhalten, die weiteren Aufschluß über seinen Untersuchungsgegenstand geben könnten.

Eine 0 dagegen kann sich überall verstecken und ist schwer zu erkennen. Deshalb streut er die 1 in seine Formeln mit Vorbedacht, so wie Hänsel und Gretel die Brotkrumen, um in schwieriger Lage den Weg zurück zu finden. Dies gelingt meist auch, sofern die Vögel des Waldes nicht das Brot und die Schreiber auf OEIS die 1-sen getilgt haben.

Machen wir die Probe auf's Exempel: Setzen wir in der Definition der Worpitzky-Zahlen (2.5) auf der rechten Seite $1 \leftarrow x$.

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle_x = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu+k} \binom{k}{\nu} (\nu + x)^n \ , \tag{2.7}$$

und erhalten damit

$$\mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_x \ . \tag{2.8}$$

Es bleibt dem Vergnügen des Lesers überlassen, sich davon zu überzeugen, dass wir damit tatsächlich die Bernoulli-Polynome im Sinne von (1.1) gewonnen haben. Geben wir zu guter Letzt noch eine Definition der Bernoulli-Polynome in einer Gestalt analog zu unserer Definition der Bernoulli-Zahlen.

> Definition. *Die Bernoulli-Polynome sind die Werte der Funktion $\beta(s, x)$ an den nichtnegativen ganzen Zahlen s. Dabei sei x eine beliebige reelle Zahl > -1,*
>
> $$\beta(s,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \Delta^k(s,x) \quad \text{wobei}$$
> $$\Delta^k(s,x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} (\nu + x + 1)^s \ .$$

Der Satz von Hasse besagt nun in einer allgemeineren Form

$$\beta(s,x) = -s\zeta(1-s,x) \ .$$

Damit erhalten wir für $n > 0$ und reelles x

$$\mathcal{B}_n(x) = -n\zeta(1-n,x) \ .$$

Helmut Hasse

... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

Summae Potestatum

$\int n = \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$
$\int nn = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$
$\int n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn$
$\int n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$
$\int n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}nn$
$\int n^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$
$\int n^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}nn$
$\int n^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$
$\int n^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}nn$
$\int n^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentuis ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\int n^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c\cdot c-1\cdot c-2}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{c-3}$$
$$+\frac{c\cdot c-1\cdot c-2\cdot c-3\cdot c-4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{c-5}$$
$$+\frac{c\cdot c-1\cdot c-2\cdot c-3\cdot c-4\cdot c-5\cdot c-6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}Dn^{c-7} \cdots \text{\& ita deinceps,}$$

exponentem potestatis ipsius n continué minuendo binario, quosque perveniatur ad n vel nn. Literae capitales A, B, C, D & c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$, & c. nempe

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}\ .$$

Auf der letzten Seite findet man Jacobs Überlegungen, so wie sie in Basel 1713, acht Jahre nach Bernoullis Tod, veröffentlicht wurden in seinem Buch *Ars Conjectandi* (dort im zweiten Teil, auf den Seiten 97-98). Wir rekonstruieren die Formel in der Notation von Graham, Knuth und Patashnik, *Concrete Mathematics*, also mit der Fakultät und den *falling factorial powers*, so wie diese dort auf Seite 47 und 52 eingeführt werden.

$$x^{\underline{m}} = \prod_{0 \leqslant k \leqslant m-1} (x-k) \quad (m \geqslant 0)\ ;$$
$$x^{\underline{m}} = \prod_{m \leqslant k \leqslant -1} (x-k)^{-1} \quad (m < 0)\ .$$

Bernoulli verwendet nicht die Bezeichnung $\mathcal{B}_k$, sondern gibt die Konstanten entweder explizit an oder schreibt A, B, C, D, ... Diese Konstanten stehen in direkter eineindeutiger Beziehung zu den Konstanten $\mathcal{B}_k$, wie man Bernoullis Formel entnimmt:

$$\mathcal{B}_0 = 1,\ \mathcal{B}_1 = \frac{1}{2},\ \mathcal{B}_2 = A = \frac{1}{6},\ \mathcal{B}_3 = 0,\ \mathcal{B}_4 = B = -\frac{1}{30},$$
$$\mathcal{B}_5 = 0,\ \mathcal{B}_6 = C = \frac{1}{42},\ \mathcal{B}_7 = 0,\ \mathcal{B}_8 = D = -\frac{1}{30}, \ldots$$

Damit erhält man Bernoullis *Summae Potestatum* in folgender Form:

$$\begin{aligned}\int n^c &= \frac{1}{c+1} B_0 n^{c+1} + B_1 n^c + \frac{c}{2} B_2 n^{c-1} \\ &\quad + \frac{c(c-1)(c-2)}{24} B_4 n^{c-3} + \ldots \\ &= \sum_{k \geqslant 0} \frac{\mathcal{B}_k}{k!} c^{\underline{k-1}} n^{c-k+1}\end{aligned}$$

Wenn es irgendetwas gibt, das den Namen *Bernoulli-Zahlen* verdient, dann sind es diese Zahlen. Und jeder Mathematiker, sei er ein großer oder ein kleiner, der dies ändern möchte, stehe bitte auf und erkläre es der mathematischen Öffentlichkeit. Diejenigen jedoch, die dies geändert haben ohne eine Erklärung zu geben, haben sich der Fälschung in einem besonders schweren Fall schuldig gemacht.

3 THE BERNOULLI REBELLION.

3.1 BUT NO, NO, TEN THOUSAND TIMES NO!

Dies war Ihre Antwort in *Two Notes on Notation* auf die Ansicht, man sollte 0^0 undefiniert lassen. Und es ist meine Antwort auf Ihre Ansicht, man solle es bei der HMF-Konvention $\mathcal{B}_1 = -1/2$ belassen.

Ich glaube an die Einheit der Mathematik und an unsere Pflicht, die Zusammenhänge, die sie offenbart, treu widerzugeben. Mathematik ist nicht ein Haufen disparater Konventionen, der in seiner jetzigen Form aufrecht zu erhalten ist, allein um unfähige Mathematiker vor der Konfusion zu retten.

Ich würde es auch nie wagen Jacob Bernoulli eine Zahl an sein Revers zu heften, wohlwissend, dass *er selber diese nie geschrieben hat*.

Und bedürfen denn Bernoullis Einsichten an dieser Stelle einer Revision? Ganz und gar nicht. Sie haben sich bestens bewährt, und die Einbettung der Bernoulli-Zahlen via der Worpitzky-Darstellung in die reflektierte Zetafunktion, wie es Helmut Hasse gezeigt hat, ist das überzeugendste Beispiel.

Lassen Sie uns die Funktion

$$\beta(z) = -z\zeta(1-z)$$

für die Bernoulli-Zahlen die selbe segensreiche Wirkung entfalten wie die eulersche Gammafunktion es für die Fakultätszahlen tat, und sie damit gleichzeitig an ihren natürlichen Ort in der Analysis einbetten – frei von allen Konventionen und allen Konfusionen ein Ende bereitend.

Verehrter Herr Professor Knuth, ich danke Ihnen sehr herzlich für Ihre Antwort. Ich möchte Sie noch davon in Kenntnis setzen, dass ich Ihre Antwort, wie angekündigt, in der Newsgruppe *de.sci.mathematik* veröffentlicht habe. Da mir aber Vorhaltungen gemacht wurden, Ihnen mit einer solch trivialen Frage die Zeit zu rauben, schicke ich Ihnen diese Antwort nicht zu, sondern lasse sie als Entwurf im Internet stehen.

Mit freundlichen Grüßen,
Peter Luschny

3.2 HEAR US, O MATHEMATICIANS OF THE WORLD!

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{2}$$

Schmeißt das Kapitel 23 im *Handbook of Mathematical Functions* in die Tonne und wenn demnächst Karl Dilcher in der *Digital Library of Mathematical Functions* diese unglückliche Tradition fortsetzen sollte, schreibt ihm eine Email und protestiert dagegen!

Wählt die Bernoulli-Funktion zu Eurem Wegweiser!

Die Bernoulli-Zahlen sind die Kinder der Zetafunktion …

Nein, die mathematische Community darf den normierenden Behörden diesen Unsinn, dem $\mathcal{B}_1$ sein Vorzeichen zu verdrehen, nicht durchgehen lassen. Und π ist nicht 3, auch wenn dies im Gesetz so steht …

3.3 LET US NOT WAIT LONGER!

Die Euler-Riemannsche Reflexionsgleichung der Zetafunktion gehört zu den Kronjuwelen der Mathematik. Laßt die Barbarei nicht länger zu, dass sie mißachtet wird mit der Setzung $\mathcal{B}_1 = -1/2$.

Und laßt uns den großen Jakob I Bernoulli auch dadurch ehren, dass wir ihm nicht Zahlen in die Schuhe schieben, die er so nie geschrieben hat. Ist es nicht vorstellbar, dass er die vorhandenen Zusammenhänge mit der Zetafunktion intuitiv erkannt hatte, während Adepten seiner Arbeit nicht in der Lage waren sie zu sehen?

3.4 JOIN US! WE BELIEVE IN THE UNITY OF MATHEMATICS!

Sansei Takekazu-Kowa Seki, Jacob I Bernoulli, von Staudt und Clausen, Worpitzky, Hasse, Neukirch, Woon, Conway und Guy, …

The Bernoulli numbers are the children of the zeta function. . .
On the definition of the Bernoulli numbers.

Web Edition. Printing Easter 2008.
This temporary version will expire on July 31th, 2008.